УДК 378.147:51

ИНТЕГРАЦИОННАЯ ЛЕКЦИЯ ПРОБЛЕМНОГО ХАРАКТЕРА ПО МАТЕМАТИКЕ ПРИ ПОДГОТОВКЕ ФИЗИКОВ И ИНЖЕНЕРОВ

канд. физ.-мат. наук, доц. И.В. КИРЮШИН
(Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка, Минск)

Разработаны методические основы интеграционной лекции проблемного характера по математике. Впервые предлагается алгоритм введения математических понятий на проблемной лекции, опирающийся на решение физико-технических задач. Алгоритм базируется на идеях содержательного обобщения, разработанного В.В. Давыдовым, и методике проблемной лекции, обоснованной А.А. Вербицким. Приводятся примеры, связанные с введением понятий несобственных интегралов. Ожидается, что проблемные лекции обеспечат творческое усвоение знаний, развитие теоретического мышления, усиление мотивации к учебе, а также приобретение навыков математического моделирования, связанных с компетентностями по специальности.

Введение. Традиционные программы высшего образования созданы на основе предметного структурирования знаний, что соответствует ЗУНовскому подходу к обучению [1, с. 7]. Раздельное изучение дисциплин, в частности физических и математических, формирует ЗУНы, также существующие отдельно друг от друга. Они позволяют решать лишь относительно простые практические задачи. Тогда как «решение сложных задач требует интеграции частных знаний и умений в сложные психологические образования. Такие интегративные образования (функциональные системы психики) были определены в рекомендациях по проектированию требований к результатам высшего образования как *компетенции*. Предметное структурирование содержания образовательных программ противоречит деятельностному определению их целей» [1, с. 7].

Перспективы разрешения данного противоречия, на наш взгляд, открываются на пути развития межпредметной интеграции математики и физики в курсах математических дисциплин через проблемное обучение. Вопросами формирования интеграционных (межпредметных) связей математики и физики в обучении математике студентов физических и инженерно-технических специальностей вузов занимались Н.А. Байгазова, В.Р. Беломестнова, Л.В. Васяк, М.Л. Груздева, В.А. Далингер, О.Г. Князева, С.Х. Мухаметдинова, Т.И. Федотова, В.А. Шершнева и др. Интеграцией в основном охвачен уровень практики математики (решение прикладных задач), причем было экспериментально доказано, что это обеспечивает рост мотивации студентов к изучению предмета, формирование навыков математического моделирования и повышение успеваемости. Однако степень интеграции на уровне математической теории еще остается слабой, хотя именно теоретический курс обеспечивает формирование теоретического мышления, приобретение математических знаний и является основой практики. В свою очередь проблемное обучение, как известно, повышает познавательную активность и развивает творческое мышление, в которых так остро нуждается современный специалист. Основы теории проблемного обучения заложили С.Л. Рубинштейн, А.В. Брушлинский, Т.В. Кудрявцев, И.Я. Лернер, А.М. Матюшкин, М.И. Махмутов, В. Оконь, М.Н. Скаткин. В высшей школе лекция проблемного характера относится к системе активного обучения, приближающего результаты обучения к потребностям профессиональной практики [2, с. 103]. Эффективность проблемного обучения неоспоримо доказана. Однако до сих пор нет серьезных работ по методике проблемного обучения математической теории в вузе, в частности при подготовке инженеров и физиков.

Цель данного исследования – создание методических основ межпредметной интеграции и проблемного обучения математической теории при подготовке физиков и инженеров. Для этого потребовалось: 1) разработать методические основы интеграционной проблемной лекции по математике и 2) конкретизировать методику решения физических проблем на лекциях по математике. При этом мы опирались на методику лекции проблемного характера, обоснованную А.А. Вербицким [2], и на идеи содержательного обобщения, разработанного В.В. Давыдовым [3].

Методика интеграционной проблемной лекции по математике

Классификация методов обучения, предложенная И.Я. Лернером и М.Н. Скаткиным (1965), в основе которой лежит характер познавательной деятельности, охватывает пять методов:

1) объяснительно-иллюстративный;
2) репродуктивный;
3) проблемное изложение;
4) частично-поисковый, или эвристический;
5) исследовательский.

Они образуют две группы: а) репродуктивную (методы 1 – 2) и б) продуктивную (методы 4 – 5). Проблемное изложение (метод 3) имеет смешанный характер, однако обычно его относят к продуктивным методам. Так или иначе, оно выделяется крупным удельным весом проблемных ситуаций в структуре учебной деятельности и является, пожалуй, единственным в своем роде подходом, на который можно опереться при изложении курса математической теории в вузе. Остальные продуктивные методы требуют для этого слишком больших затрат времени. Методы 3 – 5 называют методами проблемного обучения.

Методы обучения, основанные на принципе проблемности, по классификации М.И. Махмутова (1975) содержат как методы проблемного изложения (монологический, показательный, диалогический), так и методы проблемного обучения (эвристический, исследовательский, проблемно-программированный). Лернер И.Я. [4, с. 116] рассматривает также пять методов обучения, как и раньше, варьируя первый из них: он называет его не объяснительно-иллюстративный, а информационно-рецептивный. В информационно-рецептивном методе определяющую роль играет усвоение знаний; в репродуктивном – опыт осуществления способов деятельности; в проблемном изложении – усвоение знаний и опыт творческой деятельности; наконец, в эвристическом и исследовательском методах – и усвоение знаний, и опыт осуществления способов деятельности, и опыт творческой деятельности [4, с. 116].

Схема проблемного обучения (изложения), как известно, включает:

1) формулировку преподавателем проблемной задачи;

2) переход к проблемной ситуации;

3) ее разрешение и овладение общим способом получения новых знаний;

4) применение этого способа для решения других задач.

Деятельность учителя в методе проблемного изложения состоит в постановке проблемы и раскрытии доказательного пути ее решения. В то же время деятельность учащегося включает восприятие знаний, осознание знаний и проблемы, внимание к последовательности и контроль над степенью убедительности решения проблемы, мысленное прогнозирование очередных шагов логики решения [4, с. 117].

Создание общей теории проблемного обучения было подготовлено трудами С.Л. Рубинштейна (1958), который, изучая закономерности мышления, сделал важный вывод: «Процесс мышления берет свое начало в проблемной ситуации» [5, с. 142]. Согласно И.Я. Лернеру (1981) «*проблемная ситуация* представляет собой явно или смутно осознанное субъектом затруднение, преодоление которого требует творческого поиска новых знаний, новых способов и действий. Если у субъекта нет исходных данных для поиска путей преодоления затруднения, то проблемная ситуация не принимается субъектом к решению», не перерастает в *проблему*. «Каждая проблема содержит проблемную ситуацию, но не каждая проблемная ситуация преобразуется в проблему» [4, с. 102].

По выражению И.И. Гольдина, «проблемная ситуация – это, по существу, вопрос, заданный учащимся самому себе» [Цит. по 6, с. 262]. Понятие «проблемная ситуация» и понятие «задача» – это принципиально разные понятия, «обозначающие различные психологические реальности», причем «проблемная ситуация – центральное понятие проблемного обучения» [7, с. 31]. Проблемная ситуация может возникать при обнаружении противоречия между: 1) усвоенными знаниями и новыми требованиями или фактами; 2) многообразием существующих концепций и отсутствием правила для выбора наиболее подходящей (проблема выбора); 3) практически достигнутым результатом и отсутствием у обучаемых знаний для его теоретического обоснования; 4) теоретически возможным путем решения и его практической нецелесообразностью (неосуществимостью); 5) усвоенными знаниями и новыми практическими условиями их использования [6; 8]. В обучении высшей математике, на наш взгляд, могут встречаться в основном 1, 4 и 5-е противоречия (типы проблемных ситуаций).

В высшей школе метод проблемного изложения получил свое развитие в лекциях проблемного характера, с внедрением которых связываются перспективы повышения качества подготовки специалистов. На проблемных лекциях процесс познания студентов приближается к поисковой, исследовательской деятельности по решению специально представленных учебных проблем, отражающих «предметный и социальный контексты профессионального будущего» [2]. Как подчеркивает А.А. Вербицкий, здесь «основная задача лектора состоит не столько в передаче информации, сколько в приобщении студентов к объективным противоречиям развития научного знания и способам их разрешения. Это формирует мышление студентов, порождает их познавательную активность» [2, с. 104]. С помощью проблемных лекций обеспечивается: 1) усвоение теоретических знаний; 2) развитие теоретического мышления; 3) формирование познавательного интереса к содержанию учебного предмета и профессиональной мотивации [2, с. 104].

На проблемной лекции познающая личность включена в создаваемую преподавателем особую учебную среду. Важная роль при этом отводится *диалогическому* характеру лекции, который достигается с помощью необходимых методических приемов: постановки проблемных и информационных вопросов, выдвижения гипотез, обсуждения разных точек зрения, демонстрации исторических способов разрешения объективных противоречий, обращения «за помощью» к аудитории и др. «Проблемные вопросы – это такие вопросы, которые указывают на существо учебной проблемы и на область поиска неизвестного проблемной ситуации. Проблемные вопросы как бы направлены в будущее... Информационные вопросы ставятся с целью актуализировать уже имеющиеся у студентов знания, необходимые для понимания существа проблемы и начала умственной работы по ее разрешению. Информационные вопросы как бы направлены в прошлое...» [2, с. 109].

Диалог преподавателя с аудиторией на соответствующих этапах лекции может строиться как внешний, либо как «внутренний диалог, что наиболее типично для лекции проблемного характера. В последнем случае студенты вместе с преподавателем (во внутреннем диалоге с ним) ставят вопросы и отвечают на них или фиксируют вопросы в конспекте для последующего выяснения в ходе самостоятельных занятий, индивидуальной консультации с преподавателем либо же обсуждения с другими студентами, а также на семинаре» [2, с. 108]. С помощью диалога достигается активизация умственной деятельности студентов: включение в проблемную ситуацию, совместное с преподавателем размышление над проблемой, дискуссия (на лекции или следующем семинаре).

Таким образом, в основе проблемной лекции лежит *принцип проблемности*, предложенный А.А. Вербицким, содержащий два взаимосвязанных условия: 1) реализация проблемного подхода при отборе и дидактической обработке содержания учебного курса до лекции; 2) реализация проблемного подхода при развертывании этого содержания непосредственно на лекции (диалогическое общение) [2, с. 107].

Лекционный курс, основанный на лекциях проблемного характера, призван обеспечить творческое усвоение будущими специалистами положений изучаемой науки, методов получения новых знаний, а также методов применения усвоенных знаний на практике. Лекции проблемного характера активизируют учебно-познавательную деятельность студентов, их самостоятельную аудиторную и внеаудиторную работу [2, с. 110]. Однако до сих пор культивируется информационный тип лекций, исключающий обратную связь между преподавателем и обучаемым. Что же ограничивает внедрение проблемных лекций в практику преподавания в вузах? По мнению М.И. Махмутова, «сложность внедрения проблемного обучения в практику всех типов учебных заведений связана с недостаточной разработанностью его методики и сложностью подготовки всего учебного материала в виде проблемных познавательных задач, диалоговых конструкций силами учителя, а также с недостаточной подготовленностью учителя к организации проблемного обучения» [9].

Внедрению проблемных лекций по математике для будущих физиков и инженеров, по нашему мнению, препятствует ряд взаимообусловленных трудностей и ограничений, связанных в основном с 1) отбором проблемных задач интеграционного содержания; 2) отсутствием общего алгоритма перехода от проблемной задачи к ее решению; 3) необходимостью соответствия полученного решения исходным дидактическим требованиям (ожиданиям); 4) неясностью с общим дидактическим направлением приложения проблемных задач на лекции; 5) недостаточным инновационным мышлением большинства преподавателей.

В результате проведенных теоретических и экспериментальных исследований нами был сформулирован *алгоритм решения проблемных задач интеграционного содержания*, позволяющий вводить математические понятия в курсе теории. Алгоритм базируется на идеях содержательного обобщения, разработанного В.В. Давыдовым [3, с. 427], и методике проблемной лекции, обоснованной А.А. Вербицким [2, с. 103]. Он состоит из семи основных этапов:

1) описание физического явления (структуры) на языке физики и постановка физической задачи, решение которой требует нового математического понятия (при этом надо использовать несколько физических задач);

2) выполнение такого преобразования материала, которое позволило бы затем перейти к отношению, играющему роль всеобщей основы решения любой задачи данного вида;

3) переход к проблемной ситуации, обычно связанной с противоречием между: а) усвоенными знаниями и новыми требованиями или фактами, б) теоретически возможным способом решения задачи и его практической нецелесообразностью или в) усвоенными знаниями и новыми условиями их использования (см. выше);

4) задание студентам информационных и проблемных вопросов, выдвижение гипотез, совместный с ними поиск путей решения проблемы;

5) переход к отношению, играющему роль всеобщей основы решения любой задачи данного вида;

6) фиксация выделенного отношения в знаковой модели, позволяющей рассматривать его особенности в явном виде;

7) вскрытие таких свойств данного отношения, благодаря которым находятся условия и способ решения исходной задачи.

Заметим, что каждое новое математическое понятие вводится нами в ходе решения таких прикладных задач, которые невозможно решить без него на прежнем уровне знаний, поэтому данные задачи являются проблемными. Перечислим основные, на наш взгляд, дидактические требования к содержанию интеграционной проблемной лекции по математике:

а) проблемные задачи должны соответствовать цели формирования у студентов системы математических понятий;

б) быть физическими (физико-техническими) по содержанию;

в) быть доступными для понимания и построения математической модели;

г) включать (актуализируемое преподавателем) противоречие, неразрешимое известными студентам средствами;

д) для разрешения этого противоречия должен использоваться разработанный нами алгоритм. При этом содержание лекции должно соответствовать существующей учебной программе.

Конкретизация методики

Сначала рассмотрим решение интеграционных задач на проблемной лекции по математическому анализу при введении понятия несобственного интеграла I рода по этапам предлагаемого алгоритма. Приведем возможные информационные и проблемные вопросы.

1) ***Задача***. Найдите потенциал $U(x_0)$ точечного отрицательного заряда величины Q $(Q>0)$ на расстоянии $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) от него. Потенциал равен работе A сил электрического поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки на бесконечность: $U(x_0) = A$.

2) Считаем, что единичный положительный заряд перемещается вдоль прямой, проходящей через заряд Q и точку x_0. Найдем *формально* работу A силы кулоновского притяжения $F(x)$, направленной против вектора приращения расстояния dx:

$$dA = -F(x)dx\,,\ A = -\int_{x_0}^{+\infty} F(x)dx = -kQ\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\,,$$

где k – постоянная.

3) Возникла проблемная ситуация: верхний предел в интеграле – бесконечность, однако определенный интеграл может по определению существовать только на конечном промежутке.

4) *Проблемные вопросы*: как устранить это противоречие? Можно ли для оценки заменить бесконечный верхний предел конечным, но достаточно большим? Если сделать так, а затем постепенно увеличивать это значение, как будет изменяться величина работы? А если в качестве верхнего предела брать элементы с возрастающими номерами какой-либо монотонно возрастающей и неограниченной (бесконечно большой) последовательности, которые превосходят x_0? *Информационные вопросы*: как изменяется сила $F(x)$ с ростом x? Насколько «резко» это происходит? Что представляют собой бесконечно большая последовательность и функция?

5) Чтобы снять противоречие, запишем искомый интеграл, используя понятие предела, в виде

$$A = -\lim_{B\to+\infty}\int_{x_0}^{B} F(x)dx = -kQ\lim_{B\to+\infty}\int_{x_0}^{B}\frac{dx}{x^2}\,.$$

Исходя из физического смысла задачи можно утверждать, что этот (конечный) предел существует. Таким способом, через предел, мы перешли к *определенному* интегралу (по конечному промежутку).

6) Обозначим последнее выражение с пределом как (несобственный) интеграл с бесконечным верхним пределом, чтобы использовать его уже на *законных* основаниях:

$$\lim_{B\to+\infty}\int_{x_0}^{B}\frac{dx}{x^2} = \int_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\,.$$

7) Найдем предельное значение *определенного* интеграла:

$$\lim_{B\to+\infty}\int_{x_0}^{B}\frac{dx}{x^2} = -\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{x}\bigg|_{x_0}^{B} = \frac{1}{x_0}\,.$$

Это можно записать короче:

$$\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}\bigg|_{x_0}^{+\infty} = \frac{1}{x_0}\,.$$

Таким образом, мы можем формально использовать формулу Ньютона – Лейбница и для интегралов с бесконечным пределом интегрирования. Окончательно получим выражение для потенциала в точке x_0:

$$U(x_0) = A = -kQ/x_0\,.$$

Аналогичным образом решаем задачу о вычислении гравитационного потенциала массы M на удалении $x = x_0$ ($x_0 > 0$) от нее – через работу сил $F(x)$ гравитационного поля по перемещению единичной массы из данной точки на бесконечность. Здесь $F(x) = \gamma M/x_0^2$ (γ – гравитационная постоянная). Обобщая эти физические задачи, вводим понятие несобственного интеграла I рода и говорим о его физическом смысле в связи с рассмотренными задачами: *несобственный интеграл I рода есть электрический (гравитационный) потенциал заряда (массы) в данной точке*.

Обсудим теперь ход решения интеграционных задач для раздела «Несобственный интеграл II рода» проблемной лекции.

1) ***Задача.*** Определите массу m однородной металлической пластины, которая имеет вид фигуры, ограниченной кривой $xy^2 = 1$, осью Ox и прямыми $x = 0$, $x = a$ $(a > 0)$. Удельная масса пластины равна γ (кг/м^2).

2) Масса пластины равна $m = \gamma S$, где S – площадь фигуры. Найдем площадь S *формально* через определенный интеграл:

$$S = \int_0^a y(x)dx = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

3) Рассмотрим проблемную ситуацию: здесь нижний предел интегрирования равен нулю, однако при $x = 0$ функция $y = 1/\sqrt{x}$ не определена (область ее определения – промежуток $(0;+\infty)$). Величина $y(x)$ при $x = 0$ становится бесконечно большой, а необходимое условие существования определенного интеграла некоторой функции на отрезке – это ее ограниченность на этом отрезке.

4) *Проблемные вопросы*: как обойти эту трудность? Можно ли для оценки заменить нижний предел достаточно малой положительной величиной? А если в качестве нижнего предела использовать элементы произвольной бесконечно малой положительной последовательности с возрастающими номерами? Если по аналогии с несобственным интегралом I рода перейти к пределу? *Информационные вопросы*: чему равен предел бесконечно малой последовательности? Бесконечно малой функции? Что такое односторонний предел функции? Как показал опыт, студенты легко усваивают способ устранения противоречия, использованный нами при обсуждении несобственного интеграла I рода, и сразу предлагают применить его здесь.

5) Устраняя противоречие, запишем искомый интеграл, используя понятие предела:

$$S = \lim_{B\to 0}\int_B^a y(x)dx = \lim_{B\to 0}\int_B^a \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Итак, через предел, мы перешли к пределу *определенного* интеграла по конечному промежутку.

6) Обозначаем его как (несобственный) интеграл от неограниченной функции, чтобы использовать на *законных* основаниях:

$$\lim_{B\to 0}\int_B^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

7) Найдем предельное значение *определенного* интеграла:

$$\lim_{B\to 0}\int_B^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{B\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_B^a = 2\sqrt{a}.$$

Более короткая запись:

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^a = 2\sqrt{a}.$$

Следовательно, можно формально применять формулу Ньютона – Лейбница к несобственным интегралам от неограниченных функций. Окончательно найдем, что $m = \gamma S = 2\gamma\sqrt{a}$ (кг).

В аналогичном порядке решаем задачу по вычислению работы A, совершаемой некоторой силой $F(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ при перемещении тела вдоль прямой из точки $x = 0$ в точку $x = 1$. Здесь используем соотношение:

$$A = \int_0^1 F(x)dx.$$

Далее рассматриваем следующую задачу. Имеется точечный положительный заряд величины Q и координатная полуось Ox, начало которой совпадает с ним. Найти работу внешней силы $F(x)$ по перемещению другого точечного положительного заряда q вдоль данной полуоси из точки с координатой $x = x_0$ ($x_0 > 0$) в точку $x = 0$. Заметим, что здесь предельное выражение выглядит физически даже более корректно, чем исходное, поскольку два точечных заряда совместить нельзя. Затем обобщаем эти физические задачи и вводим понятие несобственного интеграла II рода.

Методика опробована нами в обучении математическому анализу студентов 1 курса физического факультета БГПУ (специальности «Физика. Информатика», «Физика. Техническое творчество»).

Результаты нашего исследования позволяют сделать следующие **выводы:**

1) разработаны методические основания интеграционной лекции проблемного характера по высшей математике. Впервые предлагается алгоритм введения математических понятий на проблемной лекции, опирающийся на решение физико-технических задач. Алгоритм базируется на методике проблемной лекции, обоснованной А.А. Вербицким [2], и идеях содержательного обобщения, разработанного В.В. Давыдовым [3];

2) предлагаемая методика конкретизирована для введения понятий несобственных интегралов; в свете рассмотренных интеграционных задач представлен физический смысл несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования (который есть электрический (гравитационный) потенциал заряда (массы) в данной точке);

3) с помощью интеграционных проблемных лекций создаются условия для неформального, творческого усвоения будущими физиками и инженерами теоретических знаний, развития теоретического мышления, усиления интереса к содержанию учебного предмета и профессиональной мотивации, а также для приобретения умений и навыков математического моделирования, связанных с компетентностями по специальности.

Вместо физических (физико-технических) задач в предлагаемом нами алгоритме можно при необходимости использовать и чисто *математические задачи*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методические рекомендации по разработке и реализации на основе деятельностно-компетентностного подхода образовательных программ ВПО, ориентированных на ФГОС третьего поколения / Т.П. Афанасьева [и др.]. – М.: Изд-во МГУ, 2007. – 96 с.
2. Вербицкий, А.А. Активное обучение в высшей школе: контекстный подход: метод. пособие / А.А. Вербицкий. – М.: Высш. шк., 1991. – 207 с.
3. Давыдов, В.В. Виды обобщения в обучении: Логико-психологические проблемы построения учебных предметов / В.В. Давыдов. – М.: Педагогическое общество России, 2000. – 480 с.
4. Лернер, И.Я. Дидактические основы методов обучения / И.Я. Лернер. – М.: Педагогика, 1981. – 186 с.
5. Рубинштейн, С.Л. О мышлении и путях его исследования / С.Л. Рубинштейн. – М.: Изд-во АН СССР, 1958. – 147 с.
6. Кудрявцев, Т.В. Психология технического мышления / Т.В. Кудрявцев. – М.: Педагогика, 1975. – 303 с.
7. Матюшкин, А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении / А.М. Матюшкин – М.: Педагогика, 1972. – 168 с.
8. Махмутов, М.И. Организация проблемного обучения в школе / М.И. Махмутов. – М.: Просвещение, 1977. – 240 с.
9. Махмутов, М.И. Проблемное обучение / М.И. Махмутов // Рос. пед. энцикл.: в 2-х т. – М.: Большая рос. энцикл., 1993. – Т. 2. – С. 197 – 199.

Поступила 23.06.2011

AN INTEGRATIVE LECTURE OF PROBLEM-BASED NATURE ON MATHEMATICS IN TRAINING PHYSICISTS AND ENGINEERS

I. KIRYUSHIN

Methodical foundations of an integrative lecture of problem-based nature on mathematics have created by us. An algorithm for introduction of mathematical notes (on the lecture) rested upon solving of physics problems is proposed for the first time. The algorithm is based on ideas of substantial generalization designed by V.V. Davydov and on the methodology of problem-based lecture founded by A.A. Verbickiy. The examples of introduction of notions of improper integrals are given. It is expected that problem-based lectures will provide the creative assimilation of the knowledge, development of theoretical thinking, growth in motivation to learn as well as acquisition of the habits in mathematical modeling connected with competencies on specialty.